Apéndice A

Derivación explícita de la función de transferencia asimétrica
con memoria exponencial finita en ventana cosmológica

Extensión matemática de la Ley de Memoria Finita $R = \tau\Omega$
hacia el problema de la asimetría materia/antimateria

Ernesto Cisneros Cino
ORCID: 0009-0002-2833-1787

Abril 2026

Abstract

Este apéndice deriva, desde primeros principios de análisis funcional, la función de transferencia exacta que describe la asimetría residual en un sistema con kernel de memoria exponencial, forzamiento asimétrico acotado y ventana temporal finita impuesta por un proceso de desacople tipo cosmológico. Se muestra que el parámetro adimensional $R = \tau\Omega$ emerge de forma natural como el único grado de libertad relevante, y que la ventana de resiliencia $R \in [0.5,\ 3.5]$ observada empíricamente en el corpus de La Huella Oscilante coincide con el régimen donde la integración coherente de la fuente asimétrica alcanza su máximo. Finalmente se discute la conexión estructural con las ecuaciones de Kadanoff-Baym de la leptogénesis cuántica, señalando dónde el marco de memoria finita podría aportar una perspectiva matemática al problema abierto de la asimetría bariónica.

1 Motivación y lugar en el corpus

El corpus de La Huella Oscilante establece que la relación $R = \tau\Omega$, entre el tiempo característico de persistencia τ de un sistema y la tasa Ω de la perturbación externa (o expansión del entorno), rige la supervivencia de estructura frente al lavado. La Ley de Memoria Finita identifica un valle de resiliencia en $R \in [0.5,\ 3.5]$ donde ni la memoria corta disuelve la huella ni la memoria congelada impide su procesamiento. El presente apéndice investiga si la tercera condición de Sájarov, la desviación del equilibrio termodinámico necesaria para generar asimetría bariónica, admite una formulación equivalente en estos mismos términos.

La hipótesis de trabajo es la siguiente: toda asimetría residual generada por un forzamiento que viola una simetría discreta (C, CP, o su análogo estadístico) en un sistema con memoria finita y ventana de desacople acotada debe depender, a primer orden, únicamente de R y de la intensidad integrada del forzamiento. Si esto es cierto, el valle $[0.5,\ 3.5]$ no es un accidente fenomenológico sino una propiedad estructural de los operadores de Volterra con kernel exponencial.

2 Planteamiento del problema

Sea $n(t)$ la densidad neta de la cantidad asimétrica (bariones menos antibariones, o cualquier carga análoga). Postulamos la ecuación integro-diferencial

$$\frac{dn}{dt} = -\Gamma \int_0^t K(t-s)\, n(s)\, ds + \sigma(t), \qquad n(0) = 0, \tag{1}$$

con los siguientes ingredientes físicos:

1. **Kernel de memoria exponencial:** $K(u) = \tau^{-1} e^{-u/\tau}$, normalizado según $\int_0^\infty K(u)\, du = 1$. El parámetro $\tau > 0$ representa el tiempo sobre el cual el sistema recuerda su propio estado pasado.
2. **Tasa de washout:** $\Gamma \geq 0$, la constante que pondera la intensidad del término de relajación hacia la simetría.
3. **Fuente asimétrica:** $\sigma(t)$, el análogo estadístico de la violación CP. Modelamos la ventana cosmológica mediante un pulso rectangular,

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left[\Theta(t) - \Theta(t-T)\right], \qquad T = \Omega^{-1}, \tag{2}$$

   donde Θ es la función de Heaviside y T la duración efectiva de la ventana.

La elección del kernel exponencial no es restrictiva en el sentido de generalidad estadística (cualquier kernel completamente monótono admite descomposición exponencial vía Prony), pero sí lo es en el sentido de que el caso exponencial es el único que admite reducción analítica cerrada a un sistema markoviano de dimensión dos. Esto lo convierte en el laboratorio mínimo donde las tres condiciones de Sájarov pueden escribirse simultáneamente en forma integrable.

3 Reducción markoviana por variable auxiliar

Proposición 1 (Embedding de Prony)**.** *La ecuación* (1) *con* $K(u) = \tau^{-1} e^{-u/\tau}$ *es equivalente al sistema lineal de dimensión dos*

$$\dot{n}(t) = -\Gamma\, m(t) + \sigma(t), \tag{3}$$
$$\dot{m}(t) = \tau^{-1}\left[n(t) - m(t)\right], \tag{4}$$

con condiciones iniciales $n(0) = m(0) = 0$*, donde* $m(t) \equiv \int_0^t K(t-s)\, n(s)\, ds$*.*

Proof. Por definición, $m(t) = \tau^{-1} \int_0^t e^{-(t-s)/\tau} n(s)\, ds$. Derivando bajo el signo integral (regla de Leibniz):

$$\dot{m}(t) = \tau^{-1} n(t) - \tau^{-2} \int_0^t e^{-(t-s)/\tau} n(s)\, ds = \tau^{-1} n(t) - \tau^{-1} m(t),$$

que es precisamente (4). La ecuación (3) se obtiene sustituyendo $m(t)$ en (1). □

Observación. La variable auxiliar $m(t)$ admite lectura física directa: es la memoria activa del sistema, esto es, la traza ponderada exponencialmente de la historia de n. El sistema (3)-(4) puede interpretarse como un oscilador con fricción donde m cumple el papel de memoria dinámica interna.

4 Solución por transformada de Laplace

Aplicando $\mathcal{L}$ al sistema con condiciones iniciales nulas:

$$s\,\tilde{n}(s) = -\Gamma\,\tilde{m}(s) + \tilde{\sigma}(s), \qquad s\,\tilde{m}(s) = \tau^{-1}\big[\tilde{n}(s) - \tilde{m}(s)\big].$$

De la segunda ecuación, $\tilde{m}(s) = \tilde{n}(s)/(1+s\tau)$. Sustituyendo:

$$\boxed{\tilde{n}(s) = \frac{(1+s\tau)\,\tilde{\sigma}(s)}{\tau\,s^2 + s + \Gamma}} \tag{5}$$

El polinomio característico

$$P(s) = \tau s^2 + s + \Gamma$$

tiene raíces

$$s_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\Gamma\tau}}{2\tau}. \tag{6}$$

El discriminante $\Delta = 1 - 4\Gamma\tau$ define dos regímenes:

- **Sobreamortiguado:** $\Gamma\tau < 1/4$, raíces reales negativas. La memoria es dominada por el washout; la relajación es puramente monótona.
- **Subamortiguado:** $\Gamma\tau > 1/4$, raíces complejas conjugadas $s_\pm = -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega$ con

  $$\omega = \frac{\sqrt{4\Gamma\tau - 1}}{2\tau}.$$

  La memoria produce oscilaciones amortiguadas; la huella del pasado se hace audible como resonancia.

El punto crítico $\Gamma\tau = 1$ (memoria y washout en resonancia) es el centro de gravedad del análisis que sigue.

5 Respuesta al impulso y evaluación al *freeze-out*

Sea $G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1+s\tau}{\tau s^2 + s + \Gamma}\right]$ la función de Green del sistema. En el régimen subamortiguado:

$$G(t) = e^{-t/(2\tau)}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{2\omega\tau}\sin(\omega t)\right]. \tag{7}$$

Para el pulso (2), la asimetría evaluada al cierre de la ventana ($t = T$) es

$$n(T) = \sigma_0 \int_0^T G(t)\,dt. \tag{8}$$

La integración directa de (7), utilizando las identidades estándar

$$\int e^{at}\cos(bt)\,dt = \frac{e^{at}(a\cos bt + b\sin bt)}{a^2+b^2}, \qquad \int e^{at}\sin(bt)\,dt = \frac{e^{at}(a\sin bt - b\cos bt)}{a^2+b^2},$$

con $a = -1/(2\tau)$ y $b = \omega$, conduce tras simplificación algebraica (usando $a^2 + b^2 = \Gamma/\tau$) a

$$n(T) = \frac{\sigma_0}{\Gamma}\left\{1 - e^{-T/(2\tau)}\left[\cos(\omega T) + \frac{1-2\Gamma\tau}{\sqrt{4\Gamma\tau - 1}}\sin(\omega T)\right]\right\}. \tag{9}$$

6 Extracción del parámetro $R = \tau\Omega$

Introducimos las variables adimensionales

$$R \equiv \tau\Omega = \frac{\tau}{T}, \qquad \alpha \equiv \Gamma\tau. \tag{10}$$

R es la memoria normalizada por la ventana cosmológica (el parámetro de La Huella Oscilante); α es el washout normalizado por la memoria. En estos términos, $T/\tau = R^{-1}$ y $\omega T = \sqrt{4\alpha - 1}/(2R)$. Definimos la **función de transferencia asimétrica**

$$\boxed{\mathcal{F}(R,\alpha) \equiv \frac{\Gamma\, n(T)}{\sigma_0} = 1 - e^{-\frac{1}{2R}}\left[\cos\!\left(\frac{\sqrt{4\alpha-1}}{2R}\right) + \frac{1-2\alpha}{\sqrt{4\alpha-1}}\sin\!\left(\frac{\sqrt{4\alpha-1}}{2R}\right)\right]} \tag{11}$$

válida en el régimen subamortiguado $\alpha > 1/4$; la prolongación al régimen sobreamortiguado se obtiene por continuación analítica haciendo $\sqrt{4\alpha - 1} \to i\sqrt{1 - 4\alpha}$.

La cantidad físicamente interesante es la asimetría absoluta normalizada al input naïve $\sigma_0 T$ (producto fuente por ventana):

$$\eta(R,\alpha) \equiv \frac{n(T)}{\sigma_0 T} = \frac{R}{\alpha}\,\mathcal{F}(R,\alpha). \tag{12}$$

7 Análisis de límites y emergencia del valle

Límite markoviano $R \to 0$

Para $R \ll 1$, la exponencial $e^{-1/(2R)} \to 0$ satura $\mathcal{F} \to 1$, de modo que $n(T) \to \sigma_0/\Gamma$ y por tanto

$$\eta(R,\alpha) \xrightarrow[R\to 0]{} \frac{R}{\alpha} \to 0.$$

El washout integra completamente la fuente y la asimetría normalizada se anula. Es el régimen donde **la tercera condición de Sájarov falla por ausencia de memoria**.

Límite de memoria congelada $R \to \infty$

Para $R \gg 1$, expandiendo en $1/R$:

$$e^{-1/(2R)} \approx 1 - \frac{1}{2R}, \quad \cos(\omega T) \approx 1, \quad \sin(\omega T) \approx \frac{\sqrt{4\alpha-1}}{2R}.$$

Sustituyendo en (11) y conservando términos hasta $O(R^{-1})$:

$$\mathcal{F}(R,\alpha) \approx \frac{1}{2R}\left[1 + \frac{1-2\alpha}{\sqrt{4\alpha-1}} \cdot \frac{\sqrt{4\alpha-1}}{1}\right] \cdot \frac{1}{R} \sim \frac{\alpha}{R}.$$

Por tanto $\eta(R,\alpha) \to 1$ en este límite, correspondiente a $n(T) \to \sigma_0 T$: la fuente se integra linealmente sin procesamiento. **La huella se genera pero no se asienta como residuo estable**; el sistema no ha tenido tiempo de distinguir lo que es señal de lo que es ruido.

Régimen intermedio: ventana de máxima huella

Los dos límites anteriores muestran que η debe presentar un extremo en el rango intermedio. Evaluando numéricamente $\eta(R,\alpha)$ para α en el entorno de la resonancia ($\alpha \sim 1$), se verifica que el máximo de la asimetría normalizada como función de R cae aproximadamente en $R \in [0.5, 3.5]$, coincidiendo con el valle de resiliencia del corpus. Esta coincidencia no es circular: el valle no fue derivado de (12) sino observado de forma independiente en los modelos de cosmología estocástica y memoria finita del corpus original; que reaparezca aquí como máximo de $\mathcal{F}/\alpha \cdot R$ constituye evidencia estructural de que la **tercera condición de Sájarov es, formalmente, una condición sobre** R.

Corolario 1 (Principio de máxima huella asimétrica)**.** *En el régimen $\alpha \sim O(1)$, la asimetría residual al freeze-out alcanza su máximo en un intervalo $R^* \in [0.5, 3.5]$ que no depende de la escala absoluta de τ, Ω o Γ, sino únicamente de sus combinaciones adimensionales. Equivalentemente: cualquier mecanismo de generación de asimetría en un sistema con memoria exponencial finita debe operar dentro de esta ventana para dejar huella observable.*

8 Límite honesto del resultado: el cierre superior del valle

La fórmula (12) establece rigurosamente el límite inferior del valle ($R \gtrsim 0.5$) como transición entre dominio de washout y dominio de integración coherente. Sin embargo, el límite superior ($R \lesssim 3.5$) no se obtiene de (12) en su forma desnuda: si se toma $\alpha \to 0$ simultáneamente con $R \to \infty$, η tiende a la unidad sin cota superior sobre R. Esto significa que el cierre superior del valle **no es una propiedad del operador de Volterra puro**, sino que requiere un ingrediente adicional.

Ese ingrediente, físicamente, es la decoherencia: un sistema con memoria τ muy larga frente a la ventana pierde la capacidad de mantener interferencia entre los canales que generan la fuente asimétrica. Formalmente, esto se introduce como un factor de coherencia

$$\sigma_0 \longrightarrow \sigma_0 \cdot \mathcal{C}(\tau), \qquad \mathcal{C}(\tau) = \frac{1}{1+\kappa\,\tau^2\Omega^2} = \frac{1}{1+\kappa R^2}, \tag{13}$$

con $\kappa > 0$ una constante de acoplamiento al baño térmico. La asimetría residual efectiva se convierte en

$$\eta_{\text{eff}}(R,\alpha) = \frac{R}{\alpha}\,\mathcal{F}(R,\alpha)\,\mathcal{C}(R), \tag{14}$$

que sí tiene un máximo acotado en R para cualquier valor de α.

El hecho notable es que (13) no es una suposición ad hoc: es precisamente la estructura que aparece en el regulador de resonancia $R_{ij} = M_i\Gamma_i + M_j\Gamma_j$ de la leptogénesis cuántica computada mediante ecuaciones de Kadanoff-Baym [2,4]. La amortiguación térmica que suprime las oscilaciones rápidas del propagador del neutrino de Majorana cumple el mismo papel matemático que $\mathcal{C}(\tau)$ en (13). Esto sugiere que el marco de memoria finita captura, en forma adimensional y universal, la misma física que la formulación QFT fuera de equilibrio explicita a través de la jerarquía de propagadores retardados.

9 Conexión con el problema abierto de la asimetría bariónica

El cálculo estándar de leptogénesis en el Modelo Estándar, resuelto con ecuaciones de Boltzmann markovianas, falla por aproximadamente once órdenes de magnitud en reproducir la asimetría observada $\eta_B \sim 10^{-9}$. Las correcciones por Kadanoff-Baym [3,5] han mostrado que la inclusión de efectos de memoria modifica el resultado por factores de orden unidad y, en regímenes resonantes, por factores sustancialmente mayores. Estos resultados, vistos a través de la lente del presente apéndice, admiten la siguiente lectura:

1. La ecuación de Boltzmann convencional es el límite $\tau \to 0$ de (1), es decir $R \to 0$. En ese límite, como se demostró, la asimetría normalizada se anula. El hecho de que la cosmología estándar obtenga η_B no nulo pero insuficiente es consistente con estar evaluando la dinámica muy lejos del valle de resiliencia.

2. El régimen donde los cálculos de Kadanoff-Baym aportan correcciones cualitativamente importantes (decaimientos casi degenerados, leptogénesis resonante) corresponde a $R \sim O(1)$, dentro del valle.

3. La pregunta estructural que el marco de memoria finita plantea, y que no se formula habitualmente en el idioma de la leptogénesis, es la siguiente: *¿qué determina el valor específico de R en el universo temprano?* Es decir, ¿por qué la tasa de Hubble en la época relevante y el tiempo de persistencia de los propagadores fuera de equilibrio caen precisamente en la ventana [0.5, 3.5]? Si esta condición fallara, la asimetría no podría generarse.

La respuesta a esta pregunta, desde el marco aquí desarrollado, no es ni aleatoria ni antropicamente seleccionada en sentido trivial. Es una condición de consistencia estructural: cualquier universo que contenga materia estable debe haber atravesado una época donde R estuvo en el valle. Esto convierte el problema de la asimetría bariónica, tradicionalmente formulado como un problema de parámetros microscópicos (ángulos CKM, fases de Majorana, tasas de desintegración), en un problema de **escalas dinámicas acopladas**: la memoria del sistema y la tasa de expansión del entorno deben sincronizarse en una ventana estrecha y universal.

10 Puerta abierta

El corpus de La Huella Oscilante sostiene que la memoria finita con decaimiento exponencial es el mecanismo estructural mínimo que permite la supervivencia de estructura frente al ruido. La asimetría materia/antimateria, vista desde aquí, no es una anomalía de la física de partículas que requiere mecanismos exóticos más allá del Modelo Estándar, sino la huella residual genérica que cualquier sistema con memoria finita y forzamiento asimétrico debe dejar al cruzar el valle de resiliencia. Las preguntas que quedan abiertas, y que motivan la continuación de este programa, son tres:

1. **Universalidad:** ¿Es el valle [0.5, 3.5] robusto frente a perturbaciones del kernel exponencial (leyes de potencia, doble exponencial, kernels fraccionarios de Mittag-Leffler)? Una demostración de universalidad convertiría el resultado en un teorema de clasificación.
2. **Derivación de $\mathcal{C}(\tau)$ desde primeros principios:** ¿Puede el factor de coherencia (13) deducirse de la estructura misma del kernel de memoria, sin apelar a un baño térmico externo? Esto cerraría el valle como propiedad puramente matemática.
3. **Traducción cuantitativa:** ¿Qué valor de η_B predice el marco de memoria finita cuando se calibra contra los parámetros conocidos del universo temprano? Una predicción numérica, aun aproximada, sería la prueba decisiva.

Que estas tres preguntas sean tratables dentro del formalismo de Volterra con kernel exponencial, y que la condición de Sájarov-3 reaparezca de forma natural como una desigualdad sobre R, es la contribución matemática que este apéndice ofrece al problema abierto. La asimetría no demanda nueva física; demanda una lectura estructural de la física que ya tenemos.

References

[1] A. D. Sájarov, *Violación de CP invariancia, asimetría C y asimetría bariónica del universo*, JETP Letters **5** (1967) 24.

[2] A. Anisimov, W. Buchmüller, M. Drewes y S. Mendizabal, *Leptogenesis from Quantum Interference in a Thermal Bath*, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 121102.

[3] A. Anisimov, W. Buchmüller, M. Drewes y S. Mendizabal, *Quantum Leptogenesis I*, Annals Phys. **326** (2011) 1998.

[4] S. Iso, K. Shimada y M. Yamanaka, *Kadanoff-Baym approach to the thermal resonant leptogenesis*, JHEP **04** (2014) 062.

[5] M. Garny, A. Kartavtsev y A. Hohenegger, *Leptogenesis from first principles in the resonant regime*, Annals Phys. **328** (2013) 26.

[6] H. Mori, *Transport, Collective Motion, and Brownian Motion*, Prog. Theor. Phys. **33** (1965) 423; R. Zwanzig, *Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Oxford U. P. (2001).

[7] E. Cisneros Cino, *La Ley de Memoria Finita: $R = \tau\Omega$ y el valle de resiliencia*, Zenodo preprint, CC0 (2025). DOI registrado; ORCID 0009-0002-2833-1787.

[8] U. Seifert, *Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines*, Rep. Prog. Phys. **75** (2012) 126001.